

## Buckling analysis of laminated composites plates on an elastic foundation using a new higher order theory

### Analyse du flambement des plaques en matériaux composites sur fondation élastique par une nouvelle théorie à ordre élevé

Khadija Benselama<sup>1</sup>, Nouredine El Meiche<sup>1</sup> Et El Abbès Adda Bedia<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université Djillali Liabes, Sidi bel Abbès, Algérie

**Abstract:** buckling analysis of symmetric and antisymmetric laminated composites plates on an elastic foundation is examined by a new hyperbolic displacement model. The present theory with four variables is developed with formulation based on a new model which in plane displacements varies as a hyperbolic function across the plate thickness, so account for parabolic distribution of transverse shear stresses and satisfies boundary conditions. In this study, the elastic foundation is modeled as two Parameter Pasternak type foundation and Winkler type if the second parameter is zero. Governing equations are derived from the principle of virtual displacements. These plates' equations are solved analytically for the buckling by Navier's technique. Their buckling loads are found by solving the equation of stability. Some numerical results from the present study are presented in graphical and tabular form to comparison with other models published.

**Résumé:** L'analyse du flambement des plaques stratifiées en matériaux composites, symétriques et antisymétriques simplement appuyées reposant sur une fondation élastique, est examinée par un nouveau modèle de déplacement hyperbolique. La nouvelle théorie à quatre variables est développée en tenant compte de la distribution parabolique des contraintes de cisaillement transversal. Dans cette étude, la fondation élastique est de type Pasternak de deux paramètres, et de type Winkler si le deuxième paramètre de fondation est nul. Les solutions analytiques sont obtenues en utilisant la solution de Navier, les charges critiques du flambement sont calculées en résolvant l'équation de stabilité. Les résultats numériques obtenus par l'analyse actuelle du flambement des plaques stratifiées sont comparés à ceux trouvés dans la littérature.

## 1 Introduction

Les stratifiés composites trouvent un grand intérêt dans une variété de structures complexes et d'applications technologiques grâce à leurs performances ; ils sont de plus en plus adoptés en aéronautiques, automobiles et en génie civil.

La plupart des investigations entreprises sur les plaques stratifiées sont dévouées à la détermination des contraintes des déformations ou des déplacements d'origines flexionnelles. L'analyse des structures au comportement d'instabilité est moins fréquente en dépit de l'importance du phénomène mis en évidence par la rupture en service de nombreuses constructions monumentales.

Un cumul de connaissances et de théories des stratifiées d'ordre élevé ont été développées dans cet axe [1-3].

Il y avait aussi un nombre considérable d'études sur les plaques reposants sur les fondations élastiques. Dans certaines analyses, un paramètre simple  $k_0$  est employé pour décrire le comportement de la fondation [4].

Quelques chercheurs ont modélisé la fondation avec deux paramètres différents. Un de ces modèles est le modèle de type Pasternak qui prend en compte l'effet de l'interaction de cisaillement dans les points situés sur la fondation [5-7].

Le but de ce travail est d'analyser le comportement des plaques par un nouveau modèle hyperbolique de déplacement. Les équations d'équilibre ont été tirés par le principe des travaux virtuels. La solution de Navier est utilisée a fin d'obtenir les solutions pour le cas des stratifiés simplement appuyés.

Dans ce papier les solutions analytiques du flambement des plaques stratifiées sont présentées et comparées à d'autres théories trouvées dans la littérature.

## 2 La formulation du modèle de déplacement

### 2.1 Les hypothèses de la théorie utilisée

- Les déformations transversales et la contrainte transversale normale  $\sigma_z$  sont négligées.  
-Le déplacement transversal  $W$  comprend deux composantes : à la flexion  $W_b$  et au cisaillement  $W_s$ .

$$w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \quad (1)$$

-Les déplacements  $u$  dans la direction  $x$  et  $v$  dans la direction  $y$  sont les composantes d'extension, de flexion, et de cisaillement.

$$U = u_0 + u_b + u_s, \quad V = v_0 + v_b + v_s \quad (2)$$

$$u_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial x}, \quad v_b = -z \frac{\partial w_b}{\partial y} \quad (3)$$

$$u_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x}, \quad v_s = f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (4)$$

### 2.2 Le champ de déplacement

Suite aux hypothèses citées dans le paragraphe précédent, le champ de déplacement est donné sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial x} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \frac{\partial w_b}{\partial y} + f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \\ w(x, y, z) &= w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{aligned} \quad (5)$$

$$f(z) = \frac{3\pi}{2} h \operatorname{Tanh}\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{3\pi}{2} z \operatorname{Sech}^2\left(\frac{z}{2}\right)$$

## 3 Les équations d'équilibre

Les équations qui régissent l'équilibre peuvent être obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels qui s'écrit comme suit:

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &\delta \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \\ &\tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] d\Omega dz - \int_{\Omega} [f e \delta w + \\ &\bar{N}_x \left(\frac{\partial w}{\partial x^2}\right) \delta w + \bar{N}_y \left(\frac{\partial w}{\partial y^2}\right) \delta w] d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

En intégrant par parties, On obtient les équations d'équilibre associées à la présente théorie :

$$\delta u_0 : \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\delta v_0 : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0$$

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x y} - F e - \bar{N}_x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_b + \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_s\right) - \bar{N}_y \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w_b + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_s\right) = 0$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x y} - F e - \bar{N}_x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} w_b + \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_s\right) - \bar{N}_y \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} w_b + \frac{\partial^2}{\partial y^2} w_s\right) + \frac{\partial R_x}{\partial x} + \frac{\partial R_y}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

## 4 Les solutions analytiques

Pour résoudre ce problème, on prend les solutions de Navier qui sont développées sous la forme d'une double série trigonométrique Fourier et qui satisfait les conditions aux limites :

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_b \\ w_s \end{Bmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\lambda x) \sin(\mu y) \\ V_{mn} \sin(\lambda x) \cos(\mu y) \\ W_{bmn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \\ W_{smn} \sin(\lambda x) \sin(\mu y) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$([K] - [N]) \{\Delta\} = 0 \quad (10)$$

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{bmn}, W_{smn}\} \quad (11)$$

$$\{N\}^T = \{0, 0, -\alpha^2 \bar{N}, -\beta^2 \bar{N}\} \quad (12)$$

Tel que les constantes de la matrice  $[K]$  s'écrivent comme ;

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -(A_{11}\lambda^2 + A_{66}\mu^2) \\
 a_{12} &= -\lambda \mu (A_{12} + A_{66}) \\
 a_{13} &= \lambda [B_{11}\lambda^2 + (B_{12} + 2B_{66})\mu^2] \\
 a_{14} &= -\lambda [B_{11}^s\lambda^2 + (B_{12}^s + 2B_{66}^s)\mu^2] \\
 a_{22} &= -(A_{66}\lambda^2 + A_{22}\mu^2) \\
 a_{23} &= \mu [(B_{12} + 2B_{66})\lambda^2 + B_{22}\mu^2] \\
 a_{24} &= -\mu [(B_{12}^s + 2B_{66}^s)\lambda^2 + B_{22}^s\mu^2] \\
 a_{33} &= k1(-\lambda^2 - \mu^2) - k0 - (D_{11}\lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2\mu^2 + D_{22}\mu^4) \\
 a_{34} &= k1(\lambda^2 - \mu^2) - k0 + (D_{11}^s\lambda^4 + 2(D_{12}^s + 2D_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + D_{22}^s\mu^4) \\
 a_{44} &= k1(\lambda^2 - \mu^2) - k0 - (H_{11}^s\lambda^4 + 2(H_{11}^s + 2H_{66}^s)\lambda^2\mu^2 + H_{22}^s\mu^4 + A_{55}^s\lambda^2 + A_{44}^s\mu^2)
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

### 5 Résultats

Les caractéristiques mécaniques de la plaque utilisée dans cette application numérique sont regroupées dans le tableau 1 :

Table 1. Les propriétés mécaniques du matériau utilisé.

E1 Mpa	E2 Mpa	G12, G13 Mpa	G23 Mpa	v12, v13
40.10 <sup>6</sup>	1.10 <sup>6</sup>	0.6.10 <sup>6</sup>	0.5.10 <sup>6</sup>	0.25

La charge critique adimensionnelle du flambement et les paramètres de la fondation élastique sont donnés par les relations suivantes :

$$\lambda = \bar{N}x \frac{a^2}{E_2 h^3} ; k_0 = \frac{k_0 L^4}{E_2 h^3} ; k_1 = \frac{k_1 L^2}{E_2 h^3}$$

Table 2. Les charges critiques du flambement uni axial pour une plaque carrée [0/90/90/0] avec un rapport a/h=10.

Méthode	E1/E2				
	3	10	20	30	40
CPT	5.7538	11.492	19.712	27.936	36.160
HSDT [1]	5.1143	9.7740	15.298	19.957	23.340
3D Elasticity [9]	5.2944	9.7621	15.0191	19.3040	22.8807
Akavsi [8]	5.4192	10.0671	15.6358	20.2518	24.1601
Pré. Étude 4Var	5.4144	10.2143	16.2341	21.4352	25.9758

Les charges critiques du flambement d'une plaque carrée symétrique [0/90/90/0] sont calculées par l'équation de stabilité (10) et rassemblées dans le tableau 2 pour des différents rapports d'orthotropie. Les résultats de cette analyse sont traduits en graphes dans les figures 1.

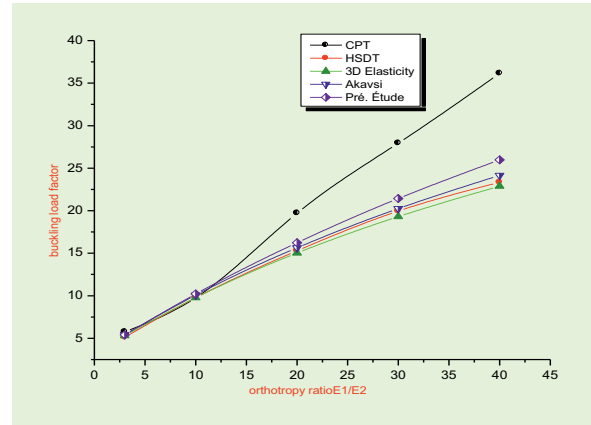


Fig.1 comparaison des différentes théories

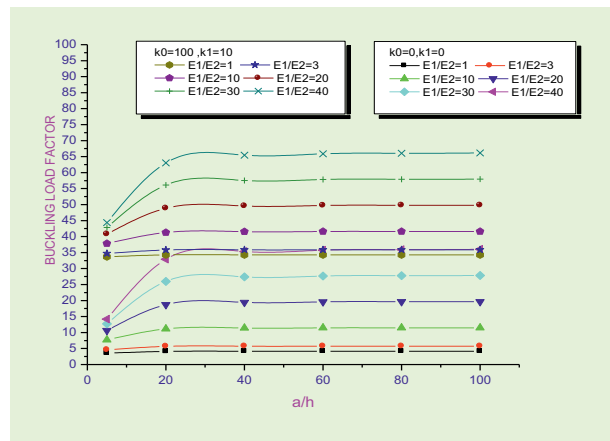


Fig. 2. L'effet de l'élongation transversale a/h et la fondation élastique sur les charges critiques du flambement pour une plaque carrée [0/90/90/0] ;

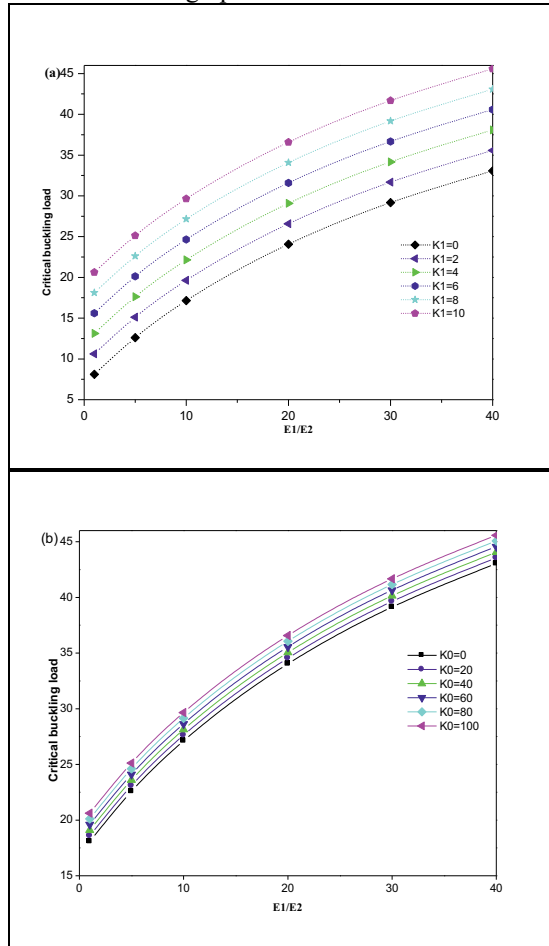
Table 3. Les charges critiques du flambement uni axial pour une plaque carrée reposée par une fondation élastique pour différent rapport d'orthotropie avec un rapport a/h=10.

En utilisant cette fois ci une autre fonction hyperbolique [11]

$$f(z) = \frac{\left[ \frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z \right]}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1}$$

k0	k1	Méthode	E1/E2		
			20	30	40
0	0	Noor[09]	7.8196	9.3746	10.8170
		HSDT <sup>a</sup> [10]	8.1151	9.8695	11.5630
		FSDT <sup>b</sup> [10]	8.0423	9.7347	11.3530
		Setoodeh[06]	8.0455	9.6995	11.2382
		Akavci[08]	8.1223	9.8826	11.5828
		Pré. théorie	8.1173	9.8549	11.5258
100	0	Setoodeh[06]	15.3245	17.5249	19.3401
		Akavci [09]	15.5347	18.2844	20.7765
		Pré. théorie	15.5484	18.2501	20.6802
100	10	Setoodeh[06]	27.5347	29.7616	31.5981
		Akavci [09]	28.0347	30.7844	33.2765
		Pré. théorie	28.0484	30.7501	33.1802

Les valeurs obtenues du tableau 3 sont interprétés en graphes suivants :



**Fig. 3.** L'effet du rapport  $E1/E2$  et la fondation élastique sur les charges critiques du flambement pour une plaque carrée soumise à la compression (a):  $K0=100$ , (b)  $K1=10$ .

## 6 Discussion et conclusion

Pour une plaque carrée symétrique soumise à des charges de flambement Uniaxial, les équations d'équilibre et les conditions aux limites associées ont été tirés du principe des travaux virtuels. La méthode de Navier a été utilisée pour les solutions analytiques avec des conditions aux limites simplement appuyées.

Dans la figure 1 ; les résultats numériques obtenus par la présente théorie ont été confrontés aux autres résultats disponibles dans la littérature utilisant un champ de déplacement à cinq variables et la théorie classique des plaques. Nous n'avons pas trouvé de grande différence, donc notre modèle de déplacement a montré son efficacité dans le calcul des charges critiques du flambement tout en respectant la distribution parabolique de la contrainte de cisaillement engendrée par l'instabilité de la plaque.

Dans la figure 2 et 3 ; l'élancement de la plaque, Le rapport d'orthotropie et la fondation élastique sont des paramètres qui augmentent la charge critique du flambement.

## References

1. N. D. Phan and J. N. Reddy. Analysis of Laminated Composite Plates using a Higher-order Shear Deformation Theory, *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, **21**: 2201–2219. (1985)
2. Kant, T. and Swaminathan, K. Analytical Solutions for Free Vibration of Laminated Composite and Sandwich Plates Based on a Higher-order Refined Theory, *Composite Structures*, **53**: 73–85. (2001).
3. Matsunaga, H. Vibration and Stability of Cross-ply Laminated Composite Plates According to a Global Higher-order Plate Theory, *Composite Structures*, **48**: 231–244 (2000).
4. El-Zafrany, A., Fadhil, S. and Al-Hosani, K. A New Fundamental Solution for Boundary Element Analysis of Thick Plates on Winkler Foundation, *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **38**: 887–903 (1995).
5. Omurtag, M. H. and Kadioglu, F. Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates Resting on Pasternak Foundation by Mixed Finite Element Formulation, *Computers and Structures*, **67**: 253–265 (1998).
6. Setoodeh, A. R. and Karami, G. Static, Free Vibration and Buckling Analysis of Anisotropic Thick Laminated Composite Plates on Distributed and Point Elastic Supports using a 3-D Layer-wise FEM, *Engineering Structures*, **26**: 211–220. (2004)
7. Xiang, Y., Kitipornchai, S. and Liew, K.M. Buckling and Vibration of Thick Laminates on Pasternak Foundation, *J. Eng Mech. ASCE*, **122** (1): 54–63. (1996).
8. S.S. Akavsi ; Buckling and Free Vibration Analysis of Symmetric and Antisymmetric Laminated Composite Plates on an Elastic Foundation *Journal of Reinforced Plastics and Composites* **26**(2007);
9. Noor, A. K. Stability of Multilayered Composite Plates, *Fibre Sci. Technology*, **8**(2): 81–89. (1975).
10. Reddy, J.N. and Khdeir, A.A. Buckling and vibration of laminated composite Plates Using Various Plate Theories, *AIAA J.* **12**: 1808-1817 (1989).
11. El meiche N. Tounsi A. Ziane N. Mechab I. Adda Bedia E. A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *International Journal of Mechanical Sciences*. **53**: 237-247 (2011).