

## Improved closed-form solution to interfacial stresses in RC beams strengthened with FRP strip

### Solution Améliorée Pour La Détermination Des Contraintes D'interfaces D'une Poutre En Béton Armé Renforcée Avec Une Plaque En Composite.

B. Krour<sup>1</sup>, F. Bernard<sup>2</sup>, A. Tounsi<sup>1</sup>, et E. A. Adda Bedia<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire des Matériaux et Hydrologie, Université de Sidi Bel Abbes, Algérie.

<sup>2</sup> Laboratoire de génie Civil et génie mécanique (LGCGM), INSA de Rennes, France.

**Abstract.** The strengthening of concrete structures in situ with externally bonded fiber-reinforced plastic (FRP) composite sheets is increasingly being used for the repair and rehabilitation of existing structures. However, debonding along the FRP-concrete interface can lead to premature failure of the structures. The interfacial stresses have played a significant role in understanding this premature debonding failure of such repaired structures. In this paper, an improved theoretical analysis of the interfacial stresses is presented for a simply supported concrete beam bonded with a FRP plate. The shear strains of the adherends have been included in the present theoretical analysis by assuming a parabolic distribution of shear stress across their thickness. Contrary to some existing studies, the assumption that both adherends have the same curvature is not used in the present investigation. A finite element model is carried out in aim of comparing it with the analytical model suggested. The results of this numerical study are beneficial for understanding the mechanical behaviour of material interfaces and for the design of hybrid FRP-reinforced concrete structures.

**Résumé.** Le renforcement des structures en béton armé en utilisant les matériaux composites est devenu une technique très répandue dans le domaine de la réparation et de la réhabilitation des ouvrages existants. Cependant, le décollement des plaques de renforcement par rapport à la structure renforcée empêche de profiter pleinement de cette technique. L'analyse des contraintes d'interface joue un rôle prépondérant dans la compréhension du phénomène de décollement. Dans ce travail, il est question d'étudier une poutre en flexion, simplement appuyée et renforcée par une plaque en composite en développant une nouvelle approche théorique basée sur la prise en compte de l'effet du cisaillement. En effet une distribution parabolique des contraintes de cisaillement le long des épaisseurs des adhérents est considérée. Contrairement à d'autres travaux qui reposent sur l'hypothèse d'une même courbure pour les adhérents ce travail propose une nouvelle approche considérant la moyenne des courbures au niveau de l'adhésif. Une

modélisation par éléments finis est réalisée dans le but de la comparer avec le modèle analytique proposé. Les résultats de cette étude semblent concorder avec ceux de la littérature et apporte ainsi une nouvelle contribution dans le calcul des structures hybrides.

## 1 INTRODUCTION

Le renforcement et la réparation des structures existantes sont devenus un défi majeur que le monde du génie civil s'est lancé ces derniers temps. L'une des réponses apportées est l'utilisation des matériaux composites collés généralement sur la face tendue de la structure.

Des études expérimentales conduites il y a des années ont montré que cette méthode de renforcement a beaucoup d'avantages par rapport aux autres méthodes traditionnelles, de part la grande résistance, la légèreté, et la durabilité des matériaux composites, Meier et al. [1]. Cependant, dans beaucoup de cas, l'application de ce type de renforcement est associée à une rupture soudaine et fragile de la poutre renforcée. Ce mode de rupture résulte habituellement de la propagation de fissures à l'interface adhésif-béton, ou encore au niveau de la partie d'enrobage des d'aciers doux. Cette rupture est attribuée au niveau élevé des contraintes normales et de cisaillement qui se développent près du bord de la plaque de renforcement et au niveau des interfaces de l'adhésif. Par conséquent des prédictions précises des contraintes d'interfaces sont nécessaires afin de se prémunir du phénomène du décollement.

Plusieurs études analytiques, numériques ou combinées ont été conduites, dans le but d'estimer ces contraintes d'interfaces. Nous citons celles menées par Vilnay [2], Roberts [3], Roberts et Haji-Kazemi [4], Taljsten [5], Malek et al. [6], Smith et Teng [7], et Tounsi et Benyoucef [8].

Dans cette étude, une nouvelle approche est proposée dans le but de s'affranchir de l'hypothèse de la courbure identique des adhérents, cette restriction étant souvent utilisée par les modèles cités plus haut. Par ailleurs l'approche tenant compte de l'effet du cisaillement des adhérents est maintenue Tounsi et al [9].

Ainsi ce nouveau modèle apporte une meilleur réponse à l'évaluation des contraintes d'interface responsables du phénomène de décollement dans les poutres en béton armé renforcé par une plaque en composite. Il montre également que les méthodes qui ne prennent pas en compte l'effet de cisaillement surestiment ces contraintes d'interface

Parallèlement à cette approche analytique, nous avons mené une investigation numérique en élaborant un modèle éléments finis sur la base des travaux récents de L. Zhang et J.G. Teng [10], ce modèle apporte des informations sur la distribution des contraintes d'interface le long et suivant l'épaisseur de l'adhésif.

## 2 Nouveau modèle analytique

### 2. 1 EQUATION D'EQUILIBRE

Considérons une poutre en béton armé de longueur  $l$  renforcée par une plaque mince de longueur  $L_p$  qui peut être soit en acier soit en polymère de fibre de carbone, l'ensemble est collé au moyen d'un adhésif. La poutre est simplement appuyée et subit une charge uniformément répartie  $q(x)$ , comme indiqué sur la figure 1.b.

Les hypothèses de calcul sont :

- 1) les matériaux sont élastiques linéaires.

2) les contraintes normales et tangentielles sont supposées être constantes suivant l'épaisseur de l'adhésif.

3) la contrainte de cisaillement le long des épaisseurs des adhérents varie paraboliquement.

En raison de la continuité des déplacements entre les adhérents et l'adhésif, nous pouvons obtenir les expressions des contraintes moyennes d'interface à partir des déformations angulaires :

$$\varepsilon_y = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \approx \frac{w_2(x) - w_1(x)}{t_a} \quad (1)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \approx \frac{u_2(x) - u_1(x)}{t_a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} + \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \right) \quad (2)$$

Où :  $u(x, y)$  et  $w(x, y)$  sont respectivement les déplacements horizontal et vertical d'un quelconque point quelconque de l'adhésif.

$u_1(x)$  et  $u_2(x)$  sont respectivement les déplacements longitudinaux à la base de l'adhérent 1 et en haut de l'adhérent 2.

$w_1(x)$  et  $w_2(x)$  sont respectivement les déplacements verticaux à la base de l'adhérent 1 et en haut de l'adhérent 2 et  $t_a$  est l'épaisseur de l'adhésif.

Dans les solutions existantes [2-9], on considère que  $\partial w(x, y) / \partial x = 0$  car les courbures des adhérents sont identiques par hypothèse.

A partir de la relation linéaire qui relie les contraintes aux déformations, nous pouvons écrire les contraintes d'interface de cisaillement ( $\tau$ ) et les contraintes d'interface normales ( $\sigma$ ) comme suit :

$$\tau(x) = G_a \left[ \frac{u_2(x) - u_1(x)}{t_a} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_2(x)}{\partial x} + \frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \right) \right], \quad \sigma(x) = \frac{E_a}{t_a} [w_2(x) - w_1(x)] \quad (3)$$

Où  $E_a$  et  $G_a$  sont les modules élastiques de l'adhésif

En tenant compte des trois composantes de déformation : axiale, de flexion et de cisaillement, la déformation à la base l'adhérent 1 et la déformation en haut de l'adhérent 2 s'écrivent selon Tounsi et al [9] comme suit :

$$\varepsilon_1(x) = \frac{du_1(x)}{dx} = \frac{y_1}{E_1 I_1} M_1(x) + \frac{N_1(x)}{E_1 S_1} + \frac{t_1}{4G_1} \frac{d\tau(x)}{dx} \quad (4)$$

$$\varepsilon_2(x) = \frac{du_2(x)}{dx} = \frac{-y_2}{E_2 I_2} M_2(x) + \frac{N_2(x)}{E_2 S_2} - \frac{5t_2}{12G_2} \frac{d\tau(x)}{dx} \quad (5)$$

Où  $N(x)$  et  $M(x)$  sont respectivement l'effort normal et le moment de flexion dans chaque adhérent.

Tandis que  $y_1$  et  $y_2$  sont les distances séparant les axes neutres de chaque adhérent de leurs interfaces respectives avec l'adhésif.

$S_1, S_2, I_1,$  et  $I_2$  sont respectivement les sections transversales et les moments d'inertie de chaque adhérent.

$E_1, E_2, G_1,$  et  $G_2$  sont respectivement les modules élastiques et de cisaillement de chaque adhérent.

En appliquant la relation courbure-moment pour chaque adhérent nous obtenons :

$$\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} = -\frac{M_1(x)}{E_1 I_1}, \quad \frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} = -\frac{M_2(x)}{E_2 I_2} \quad (6)$$

En écrivant l'équilibre des forces et des moments de l'élément infinitésimal (figure 1.a) nous obtenons l'équation couplée suivante :

$$\frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} = A_1 \frac{d\tau(x)}{dx} + A_2 \frac{d^4 \sigma(x)}{dx^4} + A_3 \sigma(x) + A_4 q(x) \quad (7)$$

$$\text{Où : } \begin{cases} A_1 = K \left( \frac{y_1^2 b_2}{E_1 I_1} + \frac{y_2^2 b_2}{E_2 I_2} + \frac{b_2}{E_1 S_1} + \frac{b_2}{E_2 S_2} + \frac{t_a b_2 y_2}{E_2 I_2} \right), & A_2 = -K \frac{t_a^2}{2E_a} \\ A_3 = K \left( \frac{y_1 b_2}{E_1 I_1} - \frac{y_2 b_2}{E_2 I_2} - \frac{t_a b_2}{E_2 I_2} \right), & A_4 = K \frac{y_1}{E_1 I_1} \text{ et } K = \frac{1}{\left( \frac{t_a}{G_a} + \frac{t_1}{4G_1} + \frac{5t_2}{12G_2} \right)} \end{cases} \quad (8)$$

Avec :  $b_2$  est la largeur de la plaque de renforcement.

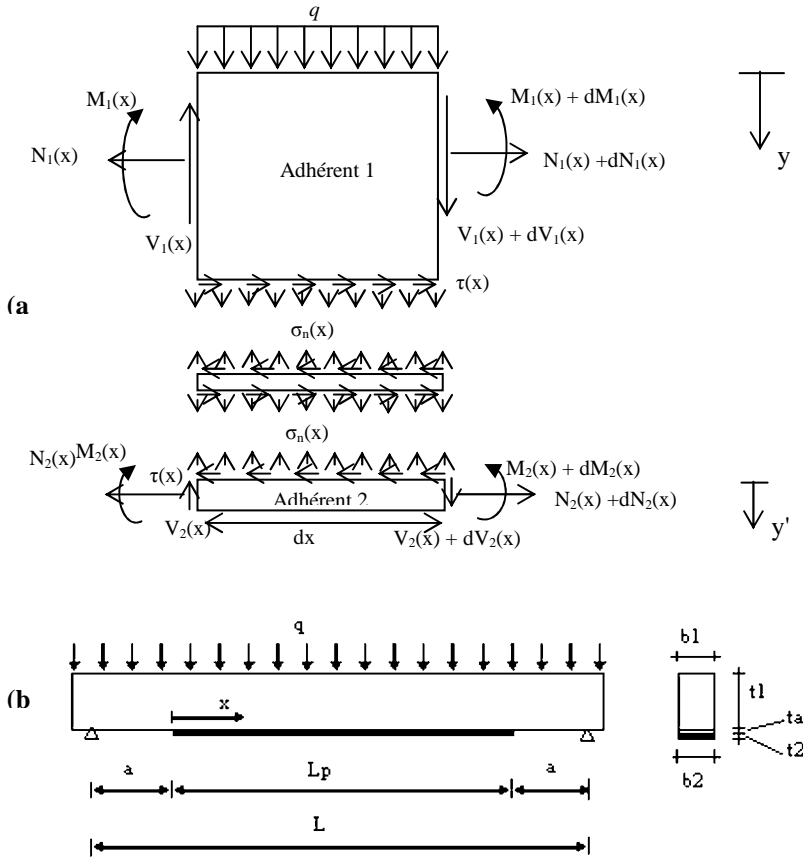


Fig. 1. Forces agissantes sur un élément infinitésimal de la poutre renforcée

A partir des équations d'équilibre des forces et des moments et en utilisant la quatrième dérivée de la contrainte normale d'interface obtenue à partir des équations (3), nous avons :

$$\frac{d^4 \sigma(x)}{dx^4} = -B_1 \sigma(x) - B_2 \frac{d\tau(x)}{dx} - B_3 q \quad (9)$$

$$\text{Où : } B_1 = \frac{E_a b_2}{t_a} \left( \frac{1}{E_1 I_1} + \frac{1}{E_2 I_2} \right), B_2 = \frac{E_a b_2}{t_a} \left( \frac{y_1}{E_1 I_1} - \frac{y_2}{E_2 I_2} \right), \text{ et } B_3 = \frac{E_a}{t_a} \frac{1}{E_1 I_1} \quad (10)$$

En introduisant l'équation (9) dans l'équation (7), nous obtenons :

$$\sigma(x) = \frac{1}{(A_3 - A_2 B_1)} \left[ \frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} - (A_1 - A_2 B_2) \frac{d\tau(x)}{dx} - (A_4 - A_2 B_3) q(x) \right] \quad (11)$$

En substituant l'équation (11) dans (9), et en tenant compte du fait que, pour un chargement concentré ou uniformément réparti les dérivées d'ordre supérieur ou égal à deux de la charge  $q(x)$  sont nulles, nous obtenons l'équation découplée suivante :

$$\frac{d^7 \tau(x)}{dx^7} + (A_2 B_2 - A_1) \frac{d^5 \tau(x)}{dx^5} + B_1 \frac{d^3 \tau(x)}{dx^3} + [B_2 (A_3 - A_2 B_1) - B_1 (A_1 - A_2 B_2)] \frac{d\tau(x)}{dx} + [B_3 (A_3 - A_2 B_1) - B_1 (A_4 - A_2 B_3)] q(x) = 0 \quad (12)$$

La solution générale de l'équation (12) est donnée par :

$$\tau(x) = A_5 q x + C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{-\lambda x} + C_3 \quad (13)$$

Où :

$$A_5 = - \left( \frac{A_4 B_1 - A_3 B_3}{A_1 B_1 - A_3 B_2} \right) \quad \text{et} \quad \lambda^2 = \frac{B_1 A_1 - B_2 A_3}{B_1} \quad (14)$$

Pour l'obtention de l'équation (13), il a été supposé que  $d^5 \tau / dx^5 = 0$ , car le terme  $d^5 \tau / dx^5$  à un effet négligeable sur la solution finale.

La solution générale de l'équation (9) est donnée par :

$$\sigma(x) = e^{-\beta x} [D_1 \cos(\beta x) + D_2 \sin(\beta x)] + e^{\beta x} [D_3 \cos(\beta x) + D_4 \sin(\beta x)] - n_1 \frac{d\tau(x)}{dx} - n_2 q \quad (15)$$

Pour de grandes valeurs de  $x$ , il est supposé que la contrainte normale tend vers zéro, par conséquent  $D_3 = D_4 = 0$ . La solution générale devient alors :

$$\sigma(x) = e^{-\beta x} [D_1 \cos(\beta x) + D_2 \sin(\beta x)] - n_1 \frac{d\tau(x)}{dx} - n_2 q \quad (16)$$

Où :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{B_1}{4}}, n_1 = \frac{y_1 E_2 I_2 - y_2 E_1 I_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2}, \text{ et } n_2 = \frac{E_2 I_2}{b_2 (E_1 I_1 + E_2 I_2)} \quad (17)$$

### 3 Modèle éléments finis

Dans le but d'enrichir ce travail, nous avons élaboré un modèle élément finis en se basant sur les travaux de L. Zhang et J.G. Teng [10]. Il s'agit d'un modèle 2D constitué d'éléments quadrilatéraux bilinéaires en contraintes planes (CPS4R) en considérant des matériaux homogènes et élastiques ayant les mêmes caractéristiques que celles utilisées pour le modèle analytique. Le contact entre les adhérents est considéré comme parfait. Ce modèle éléments finis a été réalisé en utilisant ABAQUS version 6.9.2. La constitution du maillage a fait l'objet d'études de sensibilité dans plusieurs travaux de la littérature.

### 4 Résultats et discussion

À titre illustratif, nous considérons dans ce qui suit une poutre en béton armé renforcée par une plaque CFRP. La poutre est simplement appuyée et chargée uniformément par une charge égale à 50 kN/m, le reste des données est regroupé dans le tableau 1.

**Tableau 1.** Paramètres géométriques et matériels

Component	longueur $L$ (mm)	largeur $b$ (mm)	épaisseur $t$ (mm)	$E$ (GPa)	$G$ (GPa)	$\nu$
Poutre B.A	$L=3000$	$b_1=200$	$t_1=300$	$E_1=30$		0.18
Adhésif	$L_a=2400$	$b_a=200$	$t_a=2$	$E_a=2$		0.35
Plaque CFRP	$L_p=2400$	$b_2=200$	$t_2=4$	$E_2=100$	$G_2=5$	

#### 4. 1 Comparaison avec les modèles existants

Dans le but de valider le modèle analytique proposé dans cette étude, nous optons pour une comparaison avec quelques modèles existant dans la littérature [7,9]. En effet l'exemple de la poutre en béton armé renforcée par une plaque CFRP a été étudié par Smith et Teng [7] ainsi que Tounsi et al. [9]. Les résultats des contraintes maximales obtenues au bord de la plaque sont résumés dans le tableau 2. La solution proposée par Smith et Teng [7] donne des résultats largement supérieurs à ceux du modèle présent, contrairement au modèle de Tounsi [9] avec lequel nos résultats sont en concordance. La seule différence est due uniquement au fait que le modèle présent considère la courbure moyenne entre la poutre et la plaque.

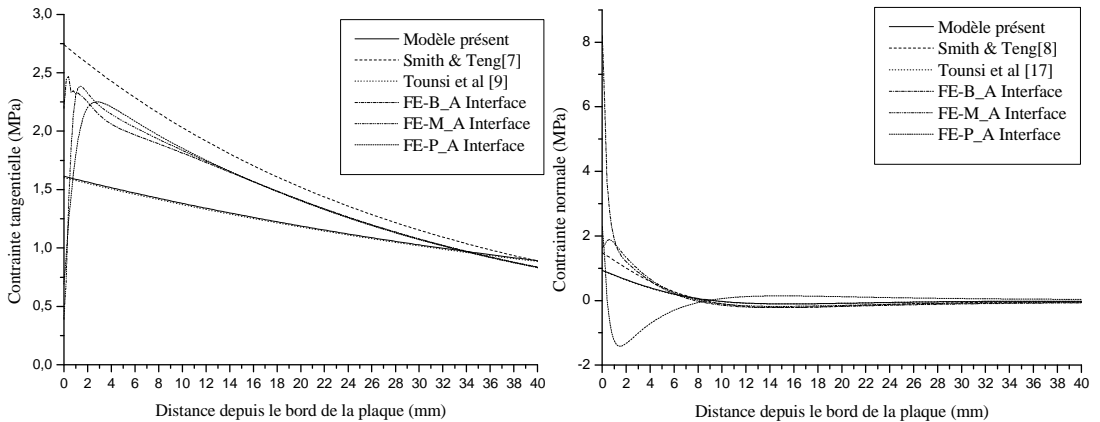
Dans la figure 2, il est question de montrer l'évolution des contraintes d'interface du modèle présent en comparaison avec le modèle de Tounsi et al. [9], le modèle Smith et Teng [7] et le modèle éléments finis.

Contrairement aux modèles analytiques, le modèle élément finis nous fournit des résultats au niveau des interfaces béton-adhésif (B-A) et plaque-adhésif (P-A). A titre comparatif nous avons pris les résultats des contraintes au milieu de l'adhésif (M-A) comme indiqué sur le tableau 2.

Il apparait clairement que les contraintes maximales dans le modèle élément finis sont le plus souvent atteinte à une distance du bord de la plaque, leurs valeurs sont comparables à celles des modèles analytiques notamment au milieu de l'adhésif (M-A), sauf dans le cas des contraintes normales au niveau des interfaces (B-A) et (P-A) où une investigation approfondie est nécessaire.

**Tableau 2.** Comparaison des contraintes d'interfaces maximales

modèles	Charge uniformément répartie					
	$\tau$ (MPa)			$\sigma$ (MPa)		
Smith and Teng [7]	2.740			1.484		
Tounsi et al [9]	1.602			0.928		
Modèle présent	1.614			0.934		
Modèle éléments finis	B-A (0.4mm)	M-A (1.39mm)	P-A (2.79mm)	B-A (0mm)	M-A (0.59mm)	P-A (0mm)
	2.468	2.384	2.251	8.208	1.889	2.293



**Fig. 2.** Comparaison des contraintes d'interfaces entre les différents modèles

## 5 Conclusions

Dans ce travail, une nouvelle approche basée sur l'hypothèse de la courbure moyenne entre les adhérents a été proposée. Cette hypothèse est souvent négligée dans les travaux antérieurs. Ce travail vise alors, à évaluer de manière plus fine les contraintes d'interface. Les résultats obtenus sont satisfaisants par rapport aux approches existantes dans la littérature et constituent donc une première étape pour la proposition de solutions concrètes pour favoriser le renforcement des poutres en béton armé.

Le modèle éléments finis vient compléter les résultats analytiques en apportant une évaluation plus précise des contraintes en tout bord de plaque. Toutefois après environ un centimètre, les modèles numériques et analytiques sont en excellent accord.

Ce modèle éléments finis nous a permis de mettre en évidence l'évolution des contraintes de décollement au niveau des deux interfaces (B-A) et (P-A) contrairement aux autres modèles fournissant des résultats au niveau de l'axe longitudinale de l'adhésif.

Les résultats des contraintes normales obtenus au bord de la plaque dans le modèle élément finis nous amènent à pousser davantage l'investigation afin de comprendre au mieux le phénomène de décollement et proposer des solutions adéquates.

## Références

1. U. Meier, M. Deuring, H. Meier et G. Schwegler. 'Strengthening of structures with advanced composites. Alternative materials for the reinforcement and prestressing of concrete, J. L. Clarke, ed., Chapman & Hall, Glasgow, Scotland, 153–171, (1993).
2. O. Vilnay. The analysis of reinforced concrete beams strengthened by epoxy bonded steel plates. *Inter J Cement Compos Lightweight Concrete* (1988); **10(2)**: 73–8.
3. Roberts TM. Approximate analysis of shear and normal stress concentrations in the adhesive layer of plated RC beams. *Struct Engr* (1989); **67(12)**: 229–33.
4. TM. Roberts, H. Haji-Kazemi. Theoretical study of the behavior of reinforced concrete beams strengthened by externally bonded steel plates. *Proc Instn Civil Engrs* (1989); **87(Part 2)**: 39–55.
5. B. Taljsten. Strengthening of beams by plate bonding. *J Mater Civil Eng—ASCE* (1997); **9(4)**: 206–12.

6. AM . Malek, H. Saadatmanesh, et MR. Ehsani. Prediction of failure load of R/C beams strengthened with FRP plate due to stress concentration at the plate end. *ACI Struct J* (1998); **95(1)**: 142–52.
7. Smith ST, Teng JG. Interfacial stresses in plated beams. *Engineering Structures* (2001); **23(7)**: 857–71.
8. A. Tounsi, S. Benyoucef. Interfacial stresses in externally FRP plated concrete beams. *International Journal of Adhesion and Adhesives* (2007), **27**: 207 – 215.
9. Tounsi A, Hassaine Daouadji T, Benyoucef S, Adda bedia E. A. Interfacial Stresses in FRP – Plated RC Beams: Effect of Adherend Shear Deformations. *International Journal of Adhesion and Adhesives* (2009); **29**: 343 – 351.
10. L. Zhang, J.G. Teng .Finite element prediction of interfacial stresses in structural members bonded with a thin plate. *Engineering Structures* **32** (2010) 459 – 471.
11. MY. Tsai, DW. Oplinger et J. Morton. Improved theoretical solutions for adhesive lap joints. *International Journal of Solids and Structures* (1998); **35(12)**: 1163–85.
12. A. Tounsi. Improved theoretical solution for interfacial stresses in concrete beams strengthened with FRP plate. *International Journal of Solids and Structures* (2006); **43**: 4154–74.